

# 高等代数中三个基本 思想的认识与实践

杜现昆

吉林大学数学学院

2018.11.9-11, 莆田学院

# 内容

- 高等代数课程的性质
- 高等代数中的三个代表思想
- 三个代表思想的实践

# 课程性质

- 重要性：课时多、学分多、竞赛、考研、衡量教与学水平的代表性课程之一
- 基础性：三大基础课之一, 最基础
- 思想性：以集合论为基础，结构化、形式化；  
结构与表示; 线性关系的基础
- 应用性：应用广泛

# 教学内容

- 多项式:  
一元多项式, 多元多项式
- 矩阵:  
矩阵的“运算”, 标准形, 二次型
- 向量空间:  
向量空间, 内积空间, 线性变换

# 与其他课程的联系

- 初等数学: 解方程, 平面解析几何
- 空间解析几何、泛函分析、抽象代数
- 数学分析:

未定元 vs 变量

多项式相等 vs 多项式函数相等

映射 $f$  vs 函数 $f(x)$

高维线性 vs 一维非线性

# 课程特点

- 实例少、背景知识少——有啥用?

解决方案:

- 历史背景知识: 代数学历史, 数学家
- 应用的例子: Google的PageRank, GPS
- 多媒体

- 抽象性、形式化——理解难
- 概念多、知识点多——记忆难

解决方案:

- 提高认识, 用代数学的思维方式来思考
- 三个代表思想

# 三个代表思想

- 代数学的研究对象：运算、关系、映射
- 高等代数的三个代表思想：
  - “运算”——运算, 关系, 映射及其关系
  - 分类——等价关系、不变量、标准形
  - 对应——问题转化、同构

# 运算

- “运算”(包括映射,关系)的性质, 各种“运算”之间的关系
- 二元运算的基本性质:  
结合律、交换律、单位元、可逆元
- 二元关系的基本性质:  
反身性、传递性、对称性、反对称性
- 映射的基本性质  
单射、满射、双射

# 多项式

- 背景:

根式求解问题  $\rightarrow$  二次、三次、四次求根公式

五次及以上方程不能根式求解

- 问题的转化: 解方程  $\longleftrightarrow$  因式分解

# 多项式的运算

- 运算: 加法、乘法、 $\gcd(f,g)$ 、次数、 $|$
- 运算的关系

|          | +                                       | $\times$                                               | $\gcd$     | $ $        |
|----------|-----------------------------------------|--------------------------------------------------------|------------|------------|
| +        | 结合律<br>交换律                              |                                                        |            |            |
| $\times$ | 分配律                                     | 结合律<br>交换律                                             |            |            |
| $\gcd$   |                                         | $(f,gh)=(f,g)(f,h), (g,h)=1$<br>$f(g,h)=(fg,fh), f$ 首一 | 结合律<br>交换律 |            |
| $ $      |                                         | 相容                                                     | 相容         | 反身性<br>传递性 |
| deg      | $\deg(f+g) \leq \max\{\deg f, \deg g\}$ | $\deg(fg) = \deg f + \deg g$                           | 次数最大的公因式   | 保序         |

# 多项式的关系

- 整除(因式、倍式): 反身性、传递性
- GCD: 整除关系下的极大元(本质)  
次数最大的公因式(现象)
- GCD可以衡量 $f, g$ 的关系的复杂性
- 设 $D_f$ 表示 $f$ 的因式集合, 两个极端情形:
  - $D_f \subset D_f \cap D_g \Leftrightarrow f|g$
  - $D_f \cap D_g = \{\text{非零数}\} \Leftrightarrow (f, g) = 1$
- $f$ 既约则只有上述极端情形出现

# 有理系数多项式

- 基本方法
  - 去分母——有理系数化成整系数
  - 提取系数的公因子——整系数多项式化成本原多项式
- 乘法保持本原性(Gauss引理)

# 矩阵的运算

- 加法, 乘法
- 数乘
- 转置, 逆, 初等变换
- 行列式, 秩

# 矩阵运算及其关系

|          | +                       | $\times$                           | 数乘                             | 转置                      | 逆                   |
|----------|-------------------------|------------------------------------|--------------------------------|-------------------------|---------------------|
| +        | 结合律<br>交换律              |                                    |                                |                         |                     |
| $\times$ | 分配律                     | 结合律                                |                                |                         |                     |
| 数乘       | 分配律                     | $a(AB)=(aA)B=A(aB)$                | $a(bA)=(ab)A$                  |                         |                     |
| 转置       | $(A+B)^T=A^T+B^T$       | $(AB)^T=B^T A^T$                   | $(aA)^T=aA^T$                  | $(A^T)^T=A$             |                     |
| 逆        |                         | $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$           | $(aA)^{-1}=a^{-1}A^{-1}$       | $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$ | $(A^{-1})^{-1}=A$   |
| det      |                         | $ AB = A  B $                      | $ aA =a^n A $                  | $ A^T = A $             | $ A^{-1} = A ^{-1}$ |
| 秩        | $r(A+B) \leq r(A)+r(B)$ | $r(A)+r(B)-n \leq r(AB) \leq r(A)$ | $r(aA)=r(A)$<br>( $a \neq 0$ ) | $r(A^T)=r(A)$           |                     |

# 初等变换与乘法

- 对矩阵A做一次初等行变换记作 $\tau(A)$ , 则

$$\tau(AB) = \tau(A)B$$

- $\tau(A) = \tau(IA) = \tau(I)A$
- 初等矩阵:  $\tau(I)$
- 做一次初等变换与乘一个初等矩阵

# 矩阵的标准形

- 分类：等价关系、不变量、标准形

|               | 等价关系                 | 不变量  | 标准形                                                          |
|---------------|----------------------|------|--------------------------------------------------------------|
| 等价            | $B = PAQ$            | 秩    | $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$             |
| 相似            | $B = P^{-1}AP$       | 不变因子 | Jordan形                                                      |
| 合同<br>(实对称矩阵) | $B = P^TAP$          | 惯性指数 | $\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ |
| 酉相似<br>(正规矩阵) | $B = P^HAP$<br>P是酉矩阵 | 特征根  | 对角矩阵                                                         |

# 约化行阶梯形——RREF

- 初等行变换下的标准形RREF

每个矩阵都有唯一一个RREF

- 用初等(行)变换化阶梯形是最基本的计算:

方程组, 逆矩阵, 秩, 行列式, Jordan形, 二次型

# 矩阵、列向量、方程组

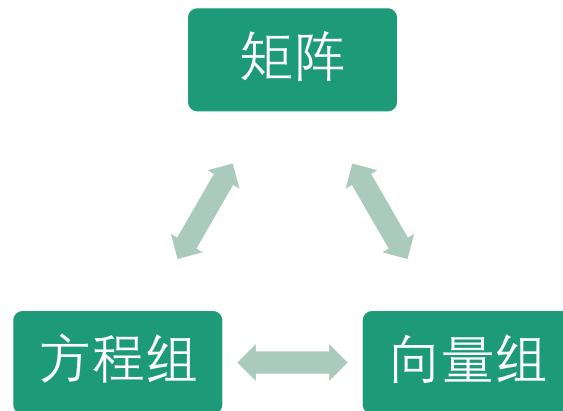
- 方程组的三种形式:

$$\text{方程: } \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\text{向量: } x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$$

$$\text{矩阵: } Ax = \beta$$

- 向量, 矩阵, 方程组的相互转化



# 向量空间的定义

一个数域, 一个集合, 两种运算, 八条公理:

加法的性质: 结合律, 交换律, 零向量, 负向量

数乘与向量加法:  $a(u + v) = au + av$

数乘与数的加法:  $(a + b)u = au + bu$

数乘与数的乘法:  $a(bu) = (ab)u$

1的作用:  $1u = u$

# 欧氏空间

- 内积的公理:
  - 内积的性质: 交换性, 正定性
  - 内积与向量加法:  $(u + v)w = uw + vw$
  - 内积与数乘:  $(au)v = a(uv)$
- 长度
  - 长度与内积:  $|uv| \leq |u||v|$
  - 长度与加法:  $|u + v| \leq |u| + |v|$
  - 长度与数乘:  $|au| = |a||v|$

# 向量空间的分类和表示

- 分类:  
同构; 维数;  $n$ 元列空间
- 对应:  
向量 $\longleftrightarrow$ 坐标

# 线性变换

向量  $u \leftrightarrow \bar{u}$  坐标

线性变换  $\sigma \leftrightarrow A$  矩阵

$$\sigma(u) \leftrightarrow A\bar{u}$$

$\text{Im } \sigma \leftrightarrow A$  的列空间

$\text{Ker } \sigma \leftrightarrow A$  的零空间

# 伴随变换

$$\sigma \leftrightarrow A$$

$$? \leftrightarrow A^T$$

$$\sigma' \leftrightarrow A^T$$

$$\sigma(u)v = u\sigma'(v)$$

$$(Au, v) = (u, A^T v)$$

$$(u^T A^T)v = u^T (A^T v)$$

$\sigma \leftrightarrow A$  保持正规性、(反)对称性、正交性

# 二次型

- 基本问题：二次型的分类
- 二次型与对称矩阵

$$\begin{array}{ccc} f(x) = x^T A x & \longleftrightarrow & A \\ x = P y \downarrow & & \downarrow P \text{合同} \\ f(Py) = y^T (P^T A P) y & \longleftrightarrow & P^T A P \\ = a_1 y_1^2 + \cdots + a_n y_n^2 & & = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \end{array}$$

# 矩阵的合同

- 对称矩阵合同于对角矩阵
- 问题： 对角矩阵的合同分类
  - 复数域：  $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
  - 实数域： 惯性定理
  - 有理数域： 数论问题

# 结论

- 三个代表思想高度概括了高等代数中的重要内容
- 三个代表思想对于教、学有很好的指导意义
- 教学中运用三个代表思想可收事半功倍之效

# 谢谢

